ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ - ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Ορισμός Μαρκοβιανών Μοντέλων

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καθορίζεται πλήρως προσδιορίζοντας:

(α) Το σύνολο των καταστάσεων $S=\{1,\dots m\}$

(β) Το σύνολο των δυνατών μεταβάσεων, δηλαδή εκείνα τα ζευγάρια (i,j), για τα οποία $p_{ij}>0$

(γ) Τις μεταβατικές τιμές των $p_{i,j}$ που είναι θετικές

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που ορίζεται από αυτό το μοντέλο είναι μια ακολουθία τ.μ. $X_0, X_1, \dots X_m$ που παίρνουν τιμές στο S και οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη: $P(X_{n+1}=j / X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots X_0=i_0) = p_{ij}$, $\forall n, \forall i,j \in S$ $\forall$ πιθανή ακολουθία προγενέστερων καταστάσεων.

Όλα τα στοιχεία μιας αλυσίδας μπορούν να κωδικοποιηθούν στο λεγόμενο πίνακα μετάβασης $m\times m$ με (i,j) στοιχείο το $p_{i,j}$:

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

Άλλος ένας πολύ χρήσιμος τρόπος περιγραφής της αλυσίδας είναι μέσω του γραφήματος, το οποίο έχει τις καταστάσεις (στοιχεία του S) ως κορυφές και για κάθε δύο κορυφές i,j για τις οποίες $p_{ij}>0$, υπάρχει μια ακμή από το i στο j με βάρος p_{ij}

Μαρκοβιανή Ιδιότητα

Οποιαδήποτε πληροφορία για τις προγενέστερες καταστάσεις $X_1, X_2, \dots X_{n-1}$ είναι περιττή όσον αφορά να συμβεί και για το X_{n+1} εφόσον γνωρίζουμε την κατάσταση X_n της σ.δ. την τελευταία στιγμή n. Μαθηματικά: $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots X_0=i_0)$

$= P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = p_{ij}$

για κάθε n, κάθε $i,j \in S$ και κάθε πιθανή ακολουθία $i_0, i_1, \dots i_{n-1}$ προηγούμενων καταστάσεων. Δηλαδή, ο πιθανοτικός νόμος της επόμενης κατάστασης X_{n+1} εξαρτάται μόνον μέσω της τιμής της παρούσας κατάστασης X_n, από το παρελθόν.

Επίσης $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \forall i \in S$

Πολλαπλασιαστικός Νόμος στις αλυσίδες Markov

$P(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n) = P(X_0=i_0)\cdot p_{i_0 i_1}\cdot p_{i_1 i_2}\cdots p_{i_{n-1} i_n}$

Αν γνωρίζουμε ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι $X_0=i_0$, τότε προφανώς: $P(X_1=i_1, \dots, X_n=i_n \mid X_0=i_0) = p_{i_0 i_1}\cdot p_{i_1 i_2}\cdots p_{i_{n-1} i_n}$

Γραφικά, μια ακολουθία καταστάσεων προσδιορίζεται από μια ακολουθία ακμών στο γράφημα και η πιθανότητα αυτής της ακολουθίας, δεδομένης της αρχικής κατάστασης, δίδεται από το γινόμενο των πιθανοτήτων των ακμών της ακολουθίας.

Πιθανότητες μετάβασης ανώτερης τάξης

$r_{ij}(n) = P(X_n=j \mid X_0=i)$, με λόγια $r_{ij}(n)$ είναι η πιθανότητα ότι η κατάσταση μετά από n χρονικά βήματα θα είναι j, δεδομένου ότι η παρούσα κατάσταση είναι i.

Εξισώσεις Chapman-Kalmogorov

$r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}(n-1)\cdot p_{kj}$, για $n>1$ και $\forall i,j$, αρχίζοντας με $r_{ij}(1)=p_{ij}$

Με λόγια οι εξισώσεις CK λένε ότι η πιθανότητα να είναι το σύστημα στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή n είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων $r_{ik}(n-1)p_{kj}$, των διάφορων δυνατών τρόπων να φτάσουμε εκεί. Εφαρμόζοντας τις CK επανειλημμένα παίρνουμε εύκολα ότι η πιθ. $r_{ij}(n)$ δεν είναι τίποτε άλλο από το (i,j) στοιχείο της (n-στης) δύναμης του πίνακα μετάβασης: $r_{ij}(n) = (P^n)_{ij}$

Steady State: Η πιθανότητα μια κατάσταση να συμβαί στο μακρινό μέλλον, δηλ. για $n\to\infty$, το $r_{ij}(n)$ θα συγκλίνει σε ένα όριο, το οποίο δεν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση.

Absorbing καταστάσεις: (απορροφητικές) επαναλαμβάνονται συνεχώς μόλις τις επισκεφτούμε, δεδομένου αρκετού χρόνου είναι σίγουρο πως θα συμβούν. Το όριό τους για $n\to\infty$ είναι 1.

Επικοινωνία καταστάσεων

Προσιτή/Προσβάσιμη κατάσταση: η j είναι προσιτή από την i, δηλ "$i \to j$" αν υπάρχει ένα μονοπάτι πάνω στο γράφημα της αλυσίδας από την i στην j. Αν $i \to j$ και $j \to i$ τότε οι i και j **επικοινωνούν**.

Έμμονη/Επαναληπτική κατάσταση: Έστω ότι $A(i)$ το σύνολο των καταστάσεων που είναι προσιτές από την i. Λέμε ότι η i είναι "έμμονη" αν $\forall j$ που είναι προσιτή από την i, η i είναι επίσης προσιτή από την j. Δηλαδή, για κάθε $j \in A(i)$ έχουμε ότι $i \in A(j)$.

Αναγωγή αλυσίδα: Όλες οι καταστάσεις της είναι ισοδύναμες $\leftrightarrow$ (αυτή η σχέση ισοδύναμα μας ορίζει τις κλάσεις επικοινωνίας)

Μεταβατική κατάσταση: όχι έμμονη, υπάρχουν καταστάσεις $j \in A(i)$ για τις οποίες η i δεν είναι προσιτή από την j. Αν το σύστημα μεταβεί από την i στην j, δεν μπορεί να ξαναγυρίσει στην i (Μεταβατική κατάσταση $\to$ επισκέψιμη πεπερασμένο αριθμό φορών. Έμμονη κατάσταση $\to$ επισκέψιμη άπειρες φορές).

Υποδιαίρεση συνόλου καταστάσεων

- Μια αλυσίδα Markov μπορεί να αναλυθεί σε μία ή περισσότερες κλάσεις επικοινωνίας + πιθανώς ορισμένες μεταβατικές καταστάσεις
- Μια έμμονη κατάσταση είναι προσιτή από όλες τις καταστάσεις της κλάσης της, αλλά όχι από καταστάσεις άλλων κλάσεων.
- Μια μεταβατική κατάσταση δεν είναι προσβάσιμη από καμία έμμονη κατάσταση
- Τουλάχιστον μία (πιθανώς περισσότερες) έμμονες καταστ. είναι προσβάσιμες από μία μεταβατική.

Περιοδικότητα: Η περιοδικότητα μίας κατάστασης i με περίοδο d ισοδυναμεί με το ότι όλα τα μονοπάτια που ξεκινούν και τελειώνουν στο i έχουν μήκος πολ/σιο του d. Μια κλάση επικοινωνίας λέγεται περιοδική αν οι καταστάσεις της μπορούν να ομαδοποιηθούν σε $d>1$ υποσύνολα $S_1, \dots S_d$, έτσι ώστε οι μεταβάσεις από το ένα υποσύνολο οδηγούν στο άλλο:
Αν $i \in S_k$ και $p_{ij} > 0$, τότε: $\begin{cases} j \in S_{k+1}, & \text{αν } k=1,\dots,d-1 \\ j \in S_1, & \text{αν } k=d \end{cases}$

Η κλάση είναι απεριοδική αν και μόνο αν υπάρχει χρόνος $\bar{n}$ και μια κατάσταση S στην κλάση, έτσι ώστε $p_{is}(\bar{n}) > 0, \forall i \in R$.

Ασυμπτωτική συμπεριφορά (steady state behavior):
$r_{ij}(n)$ καθώς $n \to \infty$??? Αφορά αλυσίδες Markov που αποτελούνται από μια κλάση επικοινωνίας έμμονων καταστάσεων συν πιθανώς κάποιες μεταβατικές καταστάσεις. Απαραίτητη και η απεριοδικότητα.

Οριακές πιθανότητες κατάστασης j: $\pi_j \approx P(X_n = j)$ για μεγάλα n

Διάνυσμα κατανομής στις καταστάσεις: $\underline{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \dots \pi_m]$, $\pi_j > 0$, $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$
αυτή είναι η κατανομή πάνω στην αλυσίδα και το π_j παριστάνει την πιθανότητα η αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση j. Αρχική κατανομή $\to \pi_0$
Κατανομή σε χρόνο $t \to \pi_t = \pi_0 P^t$

Θεώρημα σύγκλισης σε οριακή κατανομή

- Μοναδική κλάση επικοινωνίας μη-περιοδική. Οι καταστάσεις συνδέονται με π_j με τις εξής ιδιότητες:
  (a) $\lim_{n \to \infty} r_{ij}(n) = \pi_j, \forall i,j$
  (b) $\pi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj}, \quad j = 1,2,\dots m$
  $1 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k$
  (c) Ισχύει ότι $\pi_j = 0 \to$ μεταβατικές
  $\pi_j > 0 \to$ έμμονες

Οι τιμές π_j, $j=1,2,\dots m$ αποτελούν την στατική κατανομή στο χώρο καταστάσεων της αλυσίδας. Αν η αρχική κατάσταση του συστήματος ακολουθεί στατική κατανομή, τότε όλες ακολουθούν στατική κατανομή.

Εξισώσεις ισορροπίας: $\pi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_k P_{kj}, \quad j=1,\dots m$

Παράδειγμα εξισώσεων ισορροπίας:
Έστω ο πίνακας πιθ. μετάβασης: $\underline{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Εξισώσεις ισορροπίας:
$\underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \underline{P}$
$\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3]$, Επομένως: $\boxed{\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1 p + \pi_2 p + \pi_3 \cdot 1 \\ \pi_2 &= (1-p)\pi_1 \\ \pi_3 &= (1-p)\pi_2 = (1-p)^2 \pi_1 \end{aligned}}$

από εδώ βρίσκω όλα τα π_i

Έτσι, βγάζω μία σχέση για το $\pi_i \; \forall i = 1,2,\dots m$. Π.χ. εδώ θα έχω
$\boxed{\pi_i = (1-p)^{i-1} \cdot \pi_1}$, $\forall i = 1,2,\dots m$. Μετά έχω $\boxed{1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k =}$
$\boxed{= \pi_1 + (1-p)\pi_1 + (1-p)^2 \pi_1 = \pi_1 \sum_{i=0}^{m} (1-p)^i = \pi_1 \frac{1-(1-p)^{m+1}}{1-(1-p)}}$ ↳ Από εδώ βρίσκω το π_1

Συχνότητα επισκέψεων των καταστάσεων - οριακές πιθαν. καταστάσεων ως αναμενόμενες συχνότητες καταστάσεων

$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{ij}(n)}{n}$, όπου $u_{ij}(n)$ είναι ο μέσος αριθμός επανόδων στην κατάσταση j στις πρώτες n μεταβάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση i.

Άρα, π_j είναι το αναμενόμενο ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται στην j.

p_{jk} → πιθανότητα η επόμενη μετάβαση να οδηγεί στην κατάσταση k.

$\pi_j \cdot p_{jk}$ → το αναμενόμενο ποσοστό των μεταβάσεων που οδηγούν το σύστημα από την κατάσταση j στην κατάσταση k.

Αναμενόμενη συχνότητα μετάβασης

Έστω $q_{jk}(n)$ ο μέσος αριθμός των μεταβάσεων από την κατάσταση j στην k. Τότε, ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση: $\lim_{n\to\infty} \frac{q_{jk}}{n} = \pi_j p_{jk}$

Ακόμα, $\pi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj}$, δηλαδή η αναμενόμενη συχνότητα επισκέψεων της j ισούται με το άθροισμα των μεμονωμένων συχνοτήτων $\pi_k \cdot p_{kj}$ των μεταβάσεων που οδηγούν στην j.

Σ.δ. γεννήσεως-θανάτου

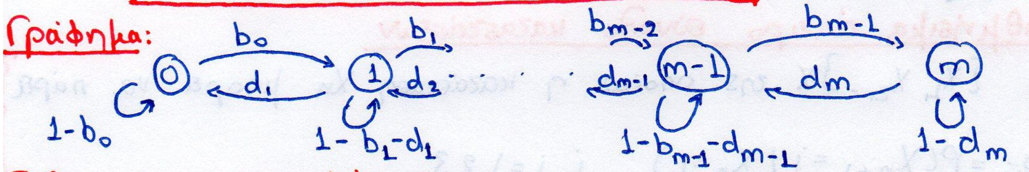
- Καταστάσεις διευθετούνται γραμμικά
- Μεταβάσεις μόνο από την ίδια κατάσταση ή την αμέσως γειτονική της
- "Γέννηση" στην κατάσταση i: $p_{i,i+1} = b_i = P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i)$
- "Θάνατος" στην κατάσταση i: $p_{i,i-1} = d_i = P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i)$

προκύπτουν οι "τοπικές εξισώσεις ισορροπίας" (→ μόνο σε αυτή την περίπτωση!)

$$\boxed{\pi_i b_i = \pi_{i+1} d_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots m-1}$$

Ακόμα, $\boxed{\pi_i = \pi_0 \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 d_2 \cdots d_i} \quad i = 1, 2, \ldots m}$

Γράφημα:



Πιθανότητες απορροφήσεως

Ενδιαφερόμαστε για την πρώτη έμμονη κατάσταση στην οποία θα βρεθεί το σύστημα και τον χρόνο μέχρι να συμβεί αυτό.

- Αν υπάρχει μόνο μία έμμονη κατάσταση (κατάσταση απορροφήσεως), τότε το σύστημα την επισκέπτεται με πιθανότητα 1, αρχίζοντας από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση
- Αν υπάρχουν περισσότερες καταστάσεις απορροφήσεως τότε, το ποια θα συμβεί εξαρτάται από την αρχική κατάσταση του συστήματος.

πιθανότητα απορροφήσεως του συστήματος από την κατάσταση s ξεκινώντας από την i:

$a_i \triangleq P(X_n$ τελικά ισούται με την κατάσταση απορρόφησης $s \mid X_0 = i)$

Για μια αλυσίδα Markov όπου κάθε κατάσταση είναι είτε μεταβατική, είτε απορροφήσεως, οι πιθανότητες απορροφήσεως a_i της αλυσίδας από την κατάσταση s ξεκινώντας από την i είναι οι μοναδικές λύσεις του γραμμικού συστήματος:

$a_s = 1$

$a_i = 0$, για κάθε κατάσταση απορροφήσεως $i \neq s$

$a_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot a_j$, για κάθε μεταβατική κατάσταση i.

Μέσος χρόνος απορροφήσεως

Ενδιαφερόμαστε για τον μέσο αριθμό των μεταβάσεων ως την επίσκεψη μίας έμμονης κατάστασης ξεκινώντας από μία μεταβατική κατάσταση.

$\mu_i \triangleq E[$αριθμός μεταβάσεων μέχρι την απορρόφηση, ξεκινώντας από $i]$

Οι μέσοι χρόνοι απορροφήσεως μ_i, ξεκινώντας από την κατάσταση i είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$\mu_i = 0$ για κάθε έμμονη κατάσταση i

$\mu_i = 1 + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot \mu_j$, για κάθε μεταβατική κατάσταση i

Μέσος χρόνος ως την 1η επίσκεψη

Ενδιαφερόμαστε για τον μέσο αριθμό των βημάτων ως την 1η διέλευση του συστήματος από μία συγκεκριμένη έμμονη κατάσταση s, ξεκινώντας από μία οποιαδήποτε κατάσταση i. Θεωρούμε αλυσίδες Markov με μία μοναδική κλάση επικοινωνίας. Τότε:

t_i: Μέσος χρόνος πρώτης μετάβασης του συστήματος από την κατάσταση i στην κατάσταση s.

$t_i \triangleq E$[αριθμός των μεταπηδήσεων μέχρι την 1η διέλευση από την s, ξεκινώντας από την i]

Αναμενόμενος χρόνος μέχρι την επίσκεψη μιας συγκεκριμένης κατάστασης s, ξεκινώντας από μία οποιαδήποτε κατάσταση i, είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$t_i = 1 + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot t_j, \text{ για κάθε } i \neq s$$

$$t_s = 0$$

Μέσος χρόνος πρώτης επανόδου

Ενδιαφερόμαστε για τον αριθμό των μεταπηδήσεων μέχρι την πρώτη επιστροφή στην s, ξεκινώντας από την s.

$t_s \triangleq$ [αριθμός μεταπηδήσεων μέχρι την 1η επιστροφή στην s, ξεκινώντας από την s]

$= 1 + \sum_{j=1}^{m} p_{sj} \cdot t_j$, όπου t_j είναι οι μέσοι χρόνοι 1ης επίσκεψης της s ξεκινώντας από την j.

Δηλαδή, ο χρόνος επιστροφής στην s, ξεκινώντας από την s, ισούται με 1 συν τον αναμενόμενο χρόνο επίσκεψης της s ξεκινώντας από την επόμενη κατάσταση, η οποία είναι η j με πιθανότητα p_{sj}.

Αλυσίδες Markov με αριθμήσιμα άπειρο σύνολο καταστάσεων

Θεωρούμε μια σ.δ. Markov $\{X_1, X_2, \ldots\}$ της οποίας η κατάσταση X_n μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή.

Πιθανότητες μετάβασης: $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad i, j = 1, 2, 3.$

Γράφημα με αριθμήσιμα άπειρο σύνολο κόμβων που αντιστοιχεί στους ακέραιους αριθμούς 1, 2, ...

Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov: $r_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} r_{ik}(n) \cdot p_{kj} \quad , i, j = 1, 2, \ldots$

όπου $r_{i,j}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i) \quad , i, j = 1, 2 \ldots$

Εξισώσεις ισορροπίας: $\pi_j = \sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k \cdot p_{kj} \quad , i, j = 1, 2 \ldots$

Θεώρημα σύγκλισης:

Θεωρούμε απεριοδική αλυσίδα Markov με αριθμήσιμα άπειρο σύνολο καταστάσεων, όπου κάθε κατάσταση είναι προσιτή από οποιαδήποτε άλλη. Έχουμε 2 περιπτώσεις:

(1) Οι $r_{ij}(n)$ συγκλίνουν στη στάσιμη κατανομή $(\pi_1, \pi_2 \ldots) \rightsquigarrow \pi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k p_{kj}, \; i,j = 1, 2 \ldots$

$\pi_1 + \pi_2 + \ldots = 1$

Επιπλέον, οι π_j ερμηνεύονται ως οι αναμενόμενες συχνότητες καταστάσεων $\pi_j = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{i,j}(n)}{n}$,

όπου $u_{i,j}(n)$ είναι ο μέσος αριθμός επισκέψεων του συστήματος στην κατάσταση j, μέσα στις n πρώτες μεταπηδήσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση i.

(2) Όλες οι $r_{ij}(n)$ συγκλίνουν στο 0, καθώς $n \to \infty$ και οι εξισώσεις ισορροπίας δεν έχουν άλλη λύση παρά την $\pi_j = 0, \forall j$.

Χρήσιμοι τύποι:

$$\sum_{k=1}^{m} (1-r)^k = \frac{1-(1-r)^m}{1-(1-r)}, \quad \sum_{k=0}^{m} (1-r)^k = \frac{1-(1-r)^{m+1}}{1-(1-r)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \text{ αν } a<1$$